

Новый подход в расчете на прочность пологих цилиндрических оболочек (В порядке обсуждения)

А. П. ЛЕЩЕНКО, канд. техн. наук, проф.

Главный недостаток принятой теории расчета оболочек на прочность — некоторая неясность физической сущности понятий «изгибающий момент» и «перерезывающая сила». Принятая в теории изгиба балок трактовка этих понятий как внешних силовых факторов к теории изгиба оболочек не применима. Здесь изгибающие моменты и перерезывающие силы, выражающиеся через цилиндрическую жесткость и изменение кривизны, не могут быть найдены методом сечений, как внешние силовые факторы.

зывает анализ «триадой» (рис. 1б), учет всех факторов при изгибе простой балки достаточно хорошо апробирован и не возникает вопросов с трактовкой изгибающего момента и перерезывающей силы как внешних силовых факторов. Такой подход позволяет увязать взаимодействие всех факторов и законов механики при изгибе оболочек.

Постановка задачи. Дана тонкая упругая полая цилиндрическая оболочка, шарнирно опертая по контуру и нагруженная сосредоточенной нагрузкой P в центре оболочки (рис. 2). Требуется рассчитать ее на прочность и жесткость $(l_z/f) \geq 10$.

Разобьем оболочку на ряд полос в направлении осей OZ и OY и рассмотрим напряженно-деформированное состояние наиболее нагруженной полосы под воздействием факторов, учитывающих ее работу в теле оболочки (рис. 2 и 3). Воздействие оболочки на полосу заменим внешней нагрузкой подпора, распределенной по параболическому закону.

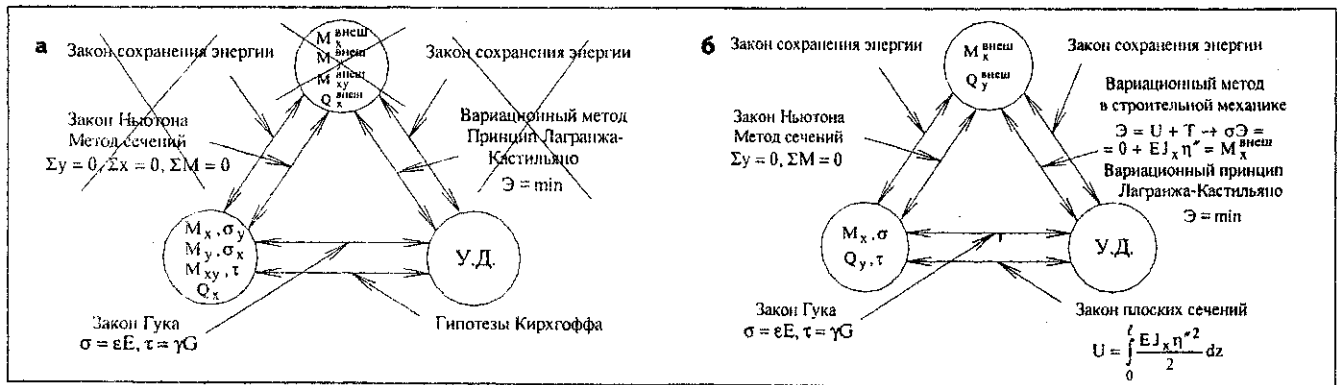


Рис. 1. Анализ концепции упругой системы при изгибе оболочек (а) и балок (б) на основе взаимодействия триады факторов

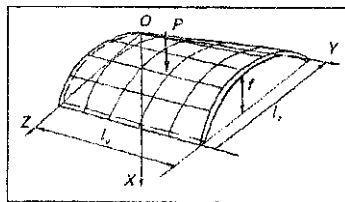
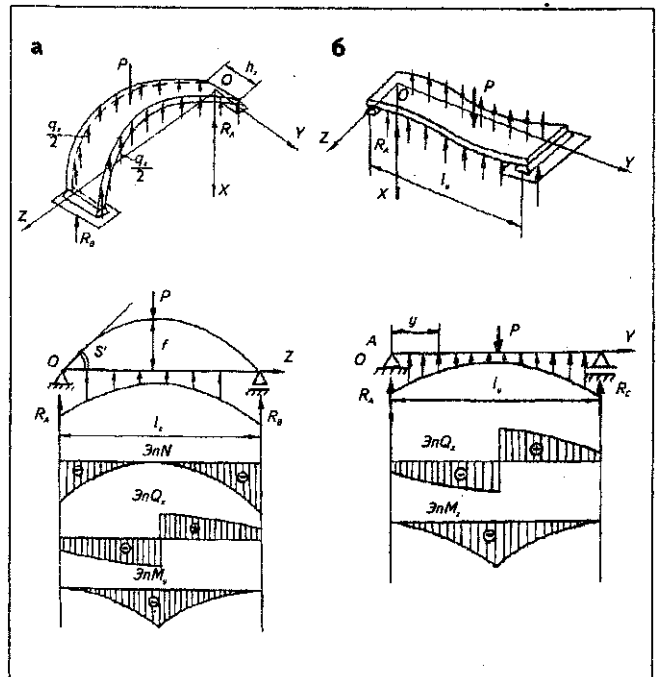


Рис 2. Расчетная схема оболочки

Более того, уравнения теории оболочек не являются уравнениями равновесия*, поскольку не могут быть получены вариационным методом, как уравнения экстремалей Эйлера—Лагранжа. Поэтому классический вариационный принцип механики, принцип Лагранжа—Кастильяно, здесь не работает. Кроме того, если нельзя трактовать изгибающий момент и перерезывающую силу как внешние силовые факторы, то вся концепция упругой системы разрушается, так как не работают законы механики (рис. 1а). Чтобы разрешить эти противоречия в теории прочности оболочек, предлагается несколько иной подход.

Разобьем оболочку на ряд полос в направлении осей OZ и OY и рассмотрим напряженное состояние каждой отдельной полосы как обычной балки на двух опорах, причем постараемся учесть все факторы, воздействующие на полосу при ее работе в теле оболочки. Как пока-

Рис. 3. Расчетные схемы полос, вырезанных из оболочки в направлении осей OZ (а) и OY (б)



* См. Лещенко А.П. Фундаментальная строительная механика упругих систем. Таганрог: Сфинкс, 2003.

Подпор запишется так:

$$q_z = q_z^* (1 - av + av^2), \text{ где } v = z/l_z.$$

Величину подпора можно найти из условия статики вырезанной из оболочки полосы:

$$\sum X = P - \int_0^{l_z} q_z dz - R_A - R_B = 0,$$

где $R_A = R_B = (q_z^*/2)h_z$, $(l_z/h_z) = 20$. Отсюда следует:

$$q_y^* = \frac{P}{l_z(1-a/b)+h_z} \text{ и } q_z = \frac{P}{l_z(1-a/b)+h_z} (1-av+av^2), \quad (1)$$

В формуле (1) остается один неизвестный параметр — коэффициент a , который можно найти, рассмотрев деформации оболочки. Рассмотрим полосу, вырезанную в направлении оси OY , и получим (рис. 2 и 3б)

$$q_y^* = \frac{P}{l_y(1-a/b)+h_y} \text{ и } q_y = \frac{P}{l_y(1-a/b)+h_y} (1-b\lambda+b\lambda^2). \quad (2)$$

В формуле (2) также остается один неизвестный параметр — коэффициент b , который можно найти, рассмотрев деформации оболочки.

Рассмотрим напряженно-деформированное состояние полос, вырезанных из оболочки в направлении осей OZ и OY , и вариационным методом получим уравнение равновесия.

Полная энергия упругодеформированного стержня (полосы) (рис. 3а) равна:

$$\mathcal{E} = \int_0^{l_z} \left[\frac{EF}{2} (\zeta')^2 + \frac{EJ_y}{2} (\xi_1'')^2 - q_s \zeta \zeta' - q_z \xi_1 \right] dz, \quad (3)$$

$$\text{где } q_z = P\delta(z-l_z/2) - q_z^* (1-av+av^2), \quad S = \frac{Cz}{l_z} - \frac{Cz^2}{l_z^2},$$

Уравнениями равновесия полосы будут уравнения экстремалей Эйлера—Лагранжа, полученные из функционала энергии (3):

$$\left. \begin{aligned} (EF\zeta' - q_s S)' &= 0, \\ (EJ_y \xi_1'')'' - q_z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Следует отметить, что для пологих цилиндрических оболочек интегрирование по кривой S можно приближенно заменить интегрированием по Z . Проинтегрируем 2-е уравнение из системы (4) на отрезке $z \in [0, l_z]$. При шарнирном опирании полосы интегрирование уравнения дает следующие значения функций прогибов ξ_1 :

$$\begin{aligned} \xi_1 = & -\frac{1}{EJ_y} \left[P \frac{\left(\frac{z^4}{24} - a \frac{z^5}{120l_z} + a \frac{z^6}{360l_z^2} \right)}{l_z(1-a/b)+h_z} + \right. \\ & + \frac{Ph_z z^3}{12(l_z(1-a/b)+h_z)} + (-Pz) \frac{\left(\frac{l_z^3}{48} - \frac{al_z^3}{384} + \frac{al_z^3}{1920} \right)}{l_z(1-a/b)+h_z} + \\ & \left. + (-Pz) \frac{h_y l_z^2}{16(l_z(1-a/b)+h_z)} + \frac{(-P)}{6} \left(z - \frac{l_z}{2} \right)^3 \sigma \left(z - \frac{l_z}{2} \right) \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Полная энергия упругодеформированного стержня (полосы) (рис. 3б) равна:

$$\mathcal{E} = \int_0^{l_y} \left[\frac{EJ_z}{2} (\xi_2'')^2 - q_y \xi_2 \right] dy, \quad (6)$$

где $q_y = P\delta(y-l_y/2) - q_y^* (1-b\lambda+b\lambda^2)$, $J_z = (h_y \delta_{об}^3)/12$.

Уравнением равновесия полосы будет уравнение экстремали Эйлера—Лагранжа, полученное из функционала энергии (6) вариационным методом:

$$(EJ_z \xi_2'')'' - q_y = 0. \quad (7)$$

Повторив все операции из предыдущих выкладок, получим выражение для определения прогибов полосы, вырезанной в направлении оси OY :

$$\begin{aligned} \xi_2 = & -\frac{1}{EJ_z} \left[P \frac{\left(\frac{y^4}{24} - b \frac{y^5}{120l_y} + b \frac{y^6}{360l_y^2} \right)}{l_y(1-b/6)+h_y} + \right. \\ & + \frac{Ph_y y^3}{12(l_y(1-b/6)+h_y)} + (-Py) \frac{\left(\frac{l_y^3}{48} - b \frac{l_y^3}{384} + b \frac{l_y^3}{1920} \right)}{l_y(1-b/6)+h_y} + \\ & \left. + (-Py) \frac{h_y l_y^2}{16(l_y(1-b/6)+h_y)} + \frac{(-P)}{6} \left(y - \frac{l_y}{2} \right)^3 \sigma \left(y - \frac{l_y}{2} \right) \right], \quad (8) \end{aligned}$$

$$\text{где } \sigma \left(y - \frac{l_y}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \text{при } y \in [0, l_y/2] \\ 1, & \text{при } y \in [l_y/2, l_y]. \end{cases}$$

В формулах для нахождения подпора и прогибов полос содержатся два неизвестных параметра — коэффициенты a и b , которые можно найти из условия совместности деформаций полос и экспериментальных исследований. Условием совместности деформаций полос является равенство прогибов в точке пересечения полос.

Это условие можно записать так:

$$\xi_1(l_z/2) = \xi_2(l_y/2). \quad (9)$$

Для тонких оболочек экспериментально получена эмпирическая формула:

$$a = f(l_z, \delta_{об}) = -|l_z|^{(-10\delta_{об}+4)} \quad (10)$$

Вычисленные из этих уравнений параметры a и b можно подставить в формулы для подпора и прогибов и найти значения изгибающих моментов M_y и M_z в середине полос и максимальный прогиб оболочки.

Условие прочности оболочки можно записать в виде неравенства:

$$[(M_z/W_z)^2 + (M_y/W_y)^2]^{1/2} \leq R_{рас}. \quad (11)$$

Условие жесткости оболочки при расчете по допускаемому максимальному прогибу можно записать в виде неравенства:

$$\xi_1(l_z/2) = \xi_2(l_y/2) \leq [f_{\max}] \quad (12)$$